1 blad.

Midtoets Calculus 1 22-9-9

36/45

8.2

1)
$1^3+2^3+\dots+n^3 = n^2(n+1)^2/4$

a $n=1$: $1^3 = 1^2\cdot(1+1)^2/4$ 1/1

$1 = 1\cdot 4/4 = 1$ QED

b inductiestap

gegeven: $1^3+2^3+\dots+n^3 = n^2(n+1)^2/4$ 3/3

te bewijzen: $1^3+2^3+\dots+n^3+(n+1)^3 = (n+1)^2(n+2)^2/4$

bewijs: $1^3+2^3+\dots+n^3 = n^2(n+1)^2/4$ (gegeven)

$1^3+2^3+\dots+n^3+(n+1)^3 = n^2(n+1)^2/4+(n+1)^3$

$= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2+(n+1)^2(n+1)$ 6/6

$= (n+1)^2\left(\frac{1}{4}n^2+n+1\right)$

$= (n+1)^2(n+2)^2/4$

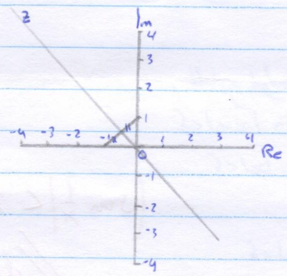
Volgens het principe van volledige inductie is het bewijs geleverd. □

2) $|z+1| = |z-i|$

5/5 $|z--1| = |z-i|$

de afstand van z tot -1 = de afstand van z tot i

z is de middelloodlijn van -1 en i



7/

3) $z^3 = -2+2i$ $r=\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{2}{-2} = -1$ $\theta = -\frac{1}{4}\pi$

$r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = \sqrt{8}(\cos -\frac{1}{4}\pi + i\sin -\frac{1}{4}\pi)$

$r^3 = \sqrt{8}$ $3\theta = -\frac{1}{4}\pi + 2k\pi$

$r = \sqrt[6]{8} = \sqrt{2}$ $\theta = -\frac{1}{12}\pi + \frac{2}{3}k\pi$ drie oplossingen!!

aan $z^3=-2+2i$ voldoen alle getallen $z=\sqrt{2}(\cos -\frac{1}{12}\pi + i\sin -\frac{1}{12}\pi)$

delen door h

4) $\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{1+h}-1}{h} = \lim_{h\to0}\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}\cdot\frac{\sqrt{1+h}+1}{\sqrt{1+h}+1} = \lim_{h\to0}\frac{1+h-1}{h\sqrt{1+h}+h} = \frac{h}{h\sqrt{1+h}+h} = \frac{\lim_{h\to0} h}{\lim_{h\to0} h\sqrt{1+h}+h} = \frac{0}{\lim_{h\to0} h\sqrt{h+1}+h} = 0$

6/10

$= \lim_{h\to0}\frac{1}{\sqrt{1+h}+1} = \frac{1}{2}$

$f(x)=\sqrt{x}$ $\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{1+h}-1}{h} = f'(1)$

$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ $f'(1) = \frac{1}{2}1^{-\frac{1}{2}} = 1$

7/10

(5) a) $\lim_{x\to a} f(x) = L$ betekent $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ zodat geldt:

2/2 $|f(x)-L|<\varepsilon$ als $|x-a|<\delta$

b) ~~$\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$~~

~~$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ zodat geldt:~~

~~$|f(x)-0|<\varepsilon$ als $|x-0|<\delta$~~

~~$|f(x)|<\varepsilon$ als $|x|<\delta$~~

~~$= \varepsilon < f(\delta)$~~

~~laten zien dat deze ε en δ klopt:~~

~~$f(\delta) > f(|x|)$~~

~~$\varepsilon > f(x)$~~

~~$|f(x)-0|<\varepsilon$~~ QED

5/8

b) $\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ zodat geldt:

$|x\sin\frac{1}{x} - 0| < \varepsilon$ als $|x-0|<\delta$

$|x\sin\frac{1}{x}| < \varepsilon$ als $|x|<\delta$

$\sin\frac{1}{x} = C$ $\quad |\sin\frac{1}{x}| < 1$

$x \cdot C < \varepsilon$ als $|x|<\delta$

$\delta = \frac{\varepsilon}{C}$ dus

~~$-1 \leq C \leq 1$~~ $C = 1$

~~$\delta = \min\{-\varepsilon, \varepsilon\}$~~ $\delta = \varepsilon$

bewijzen dat deze δ geldt:

$|x \sin\frac{1}{x}| < \varepsilon$ als $|x| < -\varepsilon$ Kan niet $|x|>0$

$-\varepsilon \cdot 1 = -\varepsilon < -\varepsilon \cdot \sin\frac{1}{-\varepsilon} \leq \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon$

QED